MAT497 Dönüşümler ve Geometriler Final Sınav Cevap Anahtarı(17/01/2022)

1.) Dönme merkezi $(0,1)$ ve dönme açısı $3\pi/2$ olan bir dönme ile dönme merkezi $(1,0)$ ve dönme açısı $\pi/2$ olan dönüşümlerin verilen sıradaki bileşkelerinin denklemini bulunuz. Bu bileşkenin bir öteleme ya da dönme olup olmadığını araştırınız**(20 P.)**.

Çözüm: $O'(h,k)$ noktası etrafında α açılı bir dönme denkleminin

$$\begin{cases} x' = xcos\alpha - ysin\alpha + a \\ y' = xsin\alpha + ycos\alpha + b \end{cases}$$

olduğunu biliyoruz. Burada,

$$\begin{cases} a = h(1-cos\alpha) + ksin\alpha \\ b = k(1-cos\alpha) - hsin\alpha \end{cases}$$

dır.

Dönme merkezi $(0,1)$ ve dönme açısı $3\pi/2$ olan değerler yukarıda yerlerine yazılır ise

$$R_1 \ldots \begin{cases} x'' = x'\overbrace{cos\frac{3\pi}{2}}^{0} - y'\overbrace{sin\frac{3\pi}{2}}^{-1} + 0.\left(1 - cos\frac{3\pi}{2}\right) + 1.sin\frac{3\pi}{2} \\ y' = x'\underbrace{sin\frac{3\pi}{2}}_{-1} + y'\underbrace{cos\frac{3\pi}{2}}_{0} + 1.\left(1 - cos\frac{3\pi}{2}\right) - 0.sin\frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_1 \ldots \begin{cases} x'' = & y' - 1 \\ y'' = & -x' + 1 \end{cases}$$

elde edilir.

Şimdi $(1,0)$ merkezli ve dönme açısı $\pi/2$ olan dönme denklemini bulalım:

$$R_2 \ldots \begin{cases} x' = xcos\frac{\pi}{2} - ysin\frac{\pi}{2} + 1.\left(1 - cos\frac{\pi}{2}\right) + 0.sin\frac{\pi}{2} \\ y' = xsin\frac{\pi}{2} + ycos\frac{\pi}{2} + 0.\left(1 - cos\frac{\pi}{2}\right) - 1.sin\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_2 \ldots \begin{cases} x' = & -y + 1 \\ y' = & x - 1 \end{cases}$$

elde edilir.

$$R_1R_2 \ldots \begin{cases} x'' = & x - 1 - 1 \\ y'' = & -(-y+1) + 1 \end{cases} \Rightarrow R_1R_2 \ \ldots \begin{cases} x' = & x - 2 \\ y' = & y \end{cases}$$

bulunur. Bu ise R_1R_2 bileşkesinin, öteleme vektörü $(-2,0)$ olan bir öteleme olduğunu gösterir.

2.) $T \ldots \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 3 \end{cases}$

ötelemesi altında $y^2 + 2y - x = 0$ eğrisinin resmini bulunuz ve her iki eğrinin grafiğini çiziniz.

T ötelemesinin geometrik yorumunu yapınız **(20 P.)**.

Çözüm:

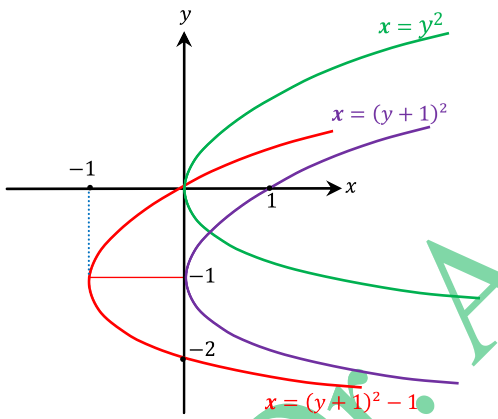
$$T \ldots \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 3 \end{cases} \Rightarrow \; T^{-1} \ldots \begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' - 3 \end{cases}$$

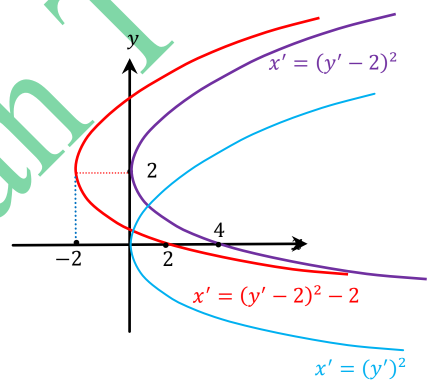
dir.

$y^2 + 2y - x = 0 \;\Rightarrow x = y^2 + 2y = (y+1)^2 - 1$ parabolünde x ve y değerlerini yerlerine yazarsak

$$(y' - 3)^2 + 2(y' - 3) - (x' + 1) = 0 \Rightarrow {y'}^2 - 6y' + 9 + 2y' - 6 - x' - 1 = 0$$
$$\Rightarrow x' = {y'}^2 - 4y' + 2 = (y' - 2)^2 - 2$$

parabolü elde edilir. Buna göre, esas eğri ile T ötelemesi altında elde edilen parabollerin grafikleri aşağıdaki gibidir:





T ötelemesi $x = y^2 + 2y$ parabolünü x −ekseni doğrultusunda 1 −birim sola ve y −ekseni doğrultusunda 3 −birim yukarıya ötelemiştir.

Açıklama: $x = y^2 + 2y = (y+1)^2 - 1$ parabolünü çizmek için aşağıdaki adımlar takip edilmelidir:

i) Önce $x = y^2$ parabolü çizilir.

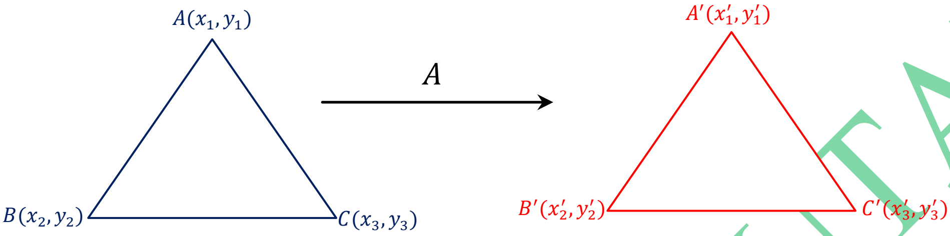
ii) $x = y^2$ parabolü y −ekseni doğrultusunda 1 birim aşağı kaydırılarak $x = (y+1)^2$ parabolü çizilir.

iii) $x = (y+1)^2$ parabolü x −ekseni doğrultusunda 1 birim sola kaydırılarak $x = (y+1)^2 - 1$ parabolü çizilir.

3.) $A\,.\,.\begin{cases} x' &= x \\ y' &= cx+dy \end{cases}$

ilkel afin dönümü altında bir üçgenin alanı ile esas üçgenin alanı arasındaki ilişkiyi araştırınız. Bundan faydalanarak A ilkel afin dönüşüm altında iki üçgenin alanları oranının korunup-korunmadığını araştırınız**(20 P.)**.

Çözüm: $A\,.\,.\begin{cases} x' &= x \\ y' &= cx+dy \end{cases}$, $\Delta = d \neq 0$,



Esas üçgenin alanına S dersek, $2S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ dir. Bu durumda A ilkel dönüşümü altındaki üçgenin alanı

$$2S' = \begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & cx_1+dy_1 & 1 \\ x_2 & cx_2+dy_2 & 1 \\ x_3 & cx_3+dy_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & cx_1 & 1 \\ x_2 & cx_2 & 1 \\ x_3 & cx_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & dy_1 & 1 \\ x_2 & dy_2 & 1 \\ x_3 & dy_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow 2S' = c\underbrace{\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & 1 \\ x_2 & x_2 & 1 \\ x_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}_{0} + d\underbrace{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}_{2S} \Rightarrow 2S' = d.2S \Rightarrow S' = d.S \text{ bulunur.}$$

Şimdi, A ilkel afin dönüşüm altında iki üçgenin alanları oranının korunup-korunmadığına bakalım:

$\frac{S_1'}{S_2'} = \frac{d.S_1}{d.S_2} \Rightarrow \frac{S_1'}{S_2'} = \frac{S_1}{S_2}$ olduğundan alanları oranı korunur.

4.) $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2),\ C\left(\frac{x_1+rx_2}{1+r}, \frac{y_1+ry_2}{1+r}\right),\ r \neq -1$ noktalarının aynı doğru üzerinde olup olmadığını araştırınız**(20 P.)**.

Çözüm: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \frac{x_1+rx_2}{1+r} & \frac{y_1+ry_2}{1+r} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{1+r}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_1+rx_2 & y_1+ry_2 & 1+r \end{vmatrix}$

$1.$ satırı -1 ile çarpıp $3.$ satıra eklersek

$$= \frac{1}{1+r}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ rx_2 & ry_2 & r \end{vmatrix} = \frac{r}{1+r}\underbrace{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}}_{0} = 0$$

olduğundan A, B, C noktaları lineer bağımlıdır. Yani, aynı doğru üzerindedirler.

5.) Bir dönmenin dönme açısı $\pi/2$ ise bu dönmenin her doğruyu kendine dik bir doğruya dönüştürdüğünü gösteriniz**(20 P.)**.

Çözüm: O' noktası etrafında α açılı bir dönme denkleminin

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b \end{cases}$$

olduğunu biliyoruz. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ olduğundan

$$R_{o'} \ldots \begin{cases} x' = & -y + a \\ y' = & x + b \end{cases}$$

elde edilir.

$d \cdots y = mx + n$ doğrusunu alalım. d doğrusunun $R_{o'}$ R_o dönmesi altındaki resmine d' dersek

$$d' \ \cdots -x' + a = m(y' - b) + n,\ \ m \neq 0,\ \Rightarrow y' = -\frac{1}{m}x' + \frac{1}{m}(a + mb - n)$$

bulunur.

$m_d = m$ ve $m_{d'} = -\frac{1}{m}$ olduğundan $m_d.m_{d'} - 1$. O halde $d \perp d'$ dir.

NOT: Dönme denklemi olarak orijin etrafındaki $R_o \ldots \begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$ dönme denklemi de alınabilir.